ハンイ

1 ベクトルと行列
2 常微分方程式
3 ベクトルの微分と、ベクトル微分演算子
4 多重積分・線積分・面積分と積分定理

例

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{dx}{dt}+x=0$$

$x(0)=1$, $x'(0)=1$ のもとでとく

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\nabla\frac{|\mathbf{v}|^2}{2}-\mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v})=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\mathbf{v}$$

が何を表しているかわかる

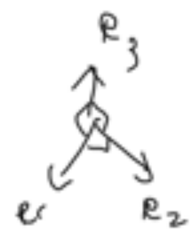
ナビエストークス

ケルビンの循環定理

$$\Gamma(C)=\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}$$

ベクトルと行列

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$



ベクトルの成分表示

3次元空間の直交単位ベクトル $\{e_1, e_2, e_3\}$

$\mathbb{A}=A_1e_1+A_2e_2\ A_3e_3$

$$\mathbb{A}=\sum_{i=1}^{3}A_ie_i$$

アインシュタインの縮約

一つの項に同じ添字が2つ現れたら

その添字の範囲で和をとる.

$$\mathbb{A}=A_ie_i$$

スカラ積(内積)とベクトル積

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}=(A_ie_i)\cdot(B_je_j)$　　$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}=|\mathbb{A}||\mathbb{B}|\cos\theta$

$$= A_i B_j \, e_i \cdot e_j$$
$$= A_i B_j \, \delta_{ij}$$
$$= A_i B_i$$

縮約の規約の下、δ_{ij} は添え字のつけ替えをする。

ベクトル積（外積）

$C = A \times B$

Cの向きは、AからBへ180°以下の角度で右ネジを回すと進む向き

$|C| = |A||B| \sin\theta$

分配則 $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

外積の成分表示

$e_1 \times e_2 = e_3$, $e_2 \times e_3 = e_1$, $e_3 \times e_1 = e_2$

$$\begin{aligned}
A \times B &= (A_i e_i) \times (B_j e_j) \\
&= (A_2 B_3 - A_3 B_2)\, e_1 \\
&\quad + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\, e_2 \\
&\quad + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\, e_3
\end{aligned}$$

エディントンのイプシロン

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) \\ 0 & \text{other} \end{cases}$$

$\boxed{(A \times B)_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k}$ と書ける。

公式

$$\boxed{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}}$$

$ij\cancel{k}\cancel{k}lm$　　$ij\cancel{k}\cancel{k}lm$

ベクトル三重積

$A \times (B \times C) = (A \cdot C) B - (A \cdot B) C$

$[A \times (B \times C)]_i = \varepsilon_{ijk} A_j (\varepsilon_{klm} B_l C_m)$

$$(\mathbb{A}\times(\mathbb{B}\times\mathbb{C}))_i = \varepsilon_{ijk} A_j (\varepsilon_{klm} B_l C_m)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} A_j B_l C_m$$
$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) A_j B_l C_m$$
$$= A_j B_i C_j - A_j B_j C_i$$
$$= (A_j C_j) B_i - (A_j B_j) C_i$$
$$= (\mathbb{A}\cdot\mathbb{C}) B_i - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\cdot C_i$$
$$= ((\mathbb{A}\cdot\mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A}\cdot\mathbb{B})\cdot\mathbb{C})_i$$

スカラ三重積

$$\mathbb{A}\,(\mathbb{B}\times\mathbb{C}) = A_i \varepsilon_{ijk} B_j C_k$$
$$= \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$$

命題.

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{D}) = (\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{D}))\,\mathbb{C} - (\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}))\,\mathbb{D}$$ を示せ

$$((\mathbb{A}\times\mathbb{B})\times(\mathbb{C}\times\mathbb{D}))_i$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\mathbb{A}\times\mathbb{B})_j (\mathbb{C}\times\mathbb{D})_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm} A_l B_m \varepsilon_{kno} C_n D_o$$
$$= (\delta_{in}\delta_{jo} - \delta_{io}\delta_{jn})\varepsilon_{jlm} A_l B_m C_n D_o$$
$$= \varepsilon_{jlm} A_l B_m (C_i D_j - C_j D_i)$$
$$= \varepsilon_{jlm}((A_l B_m D_j) C_i - (A_l B_m C_j) D_i)$$
$$= A_l(\varepsilon_{lmj}(B_m D_j) C_i - (B_m C_j) D_i)$$
$$= A_l((\mathbb{B}\times\mathbb{D})_l C_i - (\mathbb{B}\times\mathbb{C})_l D_i)$$
$$= (A_l(\mathbb{B}\times\mathbb{D})_l\cdot\mathbb{C} - A_l(\mathbb{B}\times\mathbb{C})_l\cdot\mathbb{D})_i$$
$$= ((\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{D}))\cdot\mathbb{C} - (\mathbb{A}\cdot(\mathbb{B}\times\mathbb{C}))\cdot\mathbb{D})_i \quad \square$$