(A) 物理学で用いる数学

(1) ベクトル解析
(2) フーリエ解析
(3) 微分方程式

その基礎

(4) 複素解析 → 物理のための数学2

(5) 特殊関数
(6) 群論
(7) 幾何学

3回生以上

I ベクトル解析

1.1 スカラーとベクトル

1.1.1 直感的な説明

- スカラー：大きさだけを持つ量
- ベクトル：大きさも向きも持つ量

密度,温度,エネルギー,体積…

速度…

1.1.2 ベクトル空間

def ベクトル空間

$\boxed{\text{V: set が (A),(B) をみたすとき Vはベクトル空間である}}$

(A) ベクトル和についての性質

$\vec{u},\vec{v}\in V$ について $\vec{u}+\vec{v}\in V$

という性質があり, (1)-(4) をみたす

(1) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

(2) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

(3) $\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$

(4) $\vec{v}+\vec{v'}=\vec{0}$ なる $\vec{v'}$ が存在する

(B) 実数とベクトルの積についての性質

$\vec{v} \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$ について

$a \cdot \vec{v} \in V$ という演算があり(5)−(8)をみたす

(5) $(a+b)\vec{v} = a\vec{v} + b\vec{v}$

(6) $a(\vec{v}+\vec{w}) = a\vec{v} + a\vec{w}$

(7) $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$

(8) $1\vec{v} = \vec{v}$

1.1.3 n次元実数空間 $\mathbb{R}^n$

def

n個の実数 $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ を並べた組
$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 全体がつくる集合

1.1.4 ベクトル空間としての $\mathbb{R}^n$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$a\vec{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$

1.1.5 ベクトルの基底

def

ベクトル空間において、n個のベクトルの組
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ を用いて任意のベクトル
が次の線形結合

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i$ でかけ、その u_i が一意

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ をベクトルの基底という

Remark n をベクトル空間の次元とよぶ

例 $\mathbb{R}^2$

$\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ なら $\vec{u} = (u, v)$

$\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)$

$\vec{u}=u\vec{e_1}+v\vec{e_2}$

正規直交基底 $\vec{e_i}\cdot\vec{e_j}=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & \text{other}\end{cases}$

例 $\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(0,1)\in\mathbb{R}^2$

注 全ての基底が正規直交基底というわけではない

例 $\mathbb{R}^2$ の $\vec{e_1}=(1,0)$, $\vec{e_2}=(1,1)$

$\vec{u}=(u,v)$, $\vec{u}=(u-v)\vec{e_1}+v\vec{e_2}$

1.1.6 ベクトルの成分

def

基底 $\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ に対して

$\vec{u}=\sum_{i=1}^{n}u_i\vec{e_i}$ とかけるとき

$(u_1,\dots,u_n)$ を $\vec{u}$ の成分という

remark 1 ベクトル空間の基底は一意ではない

remark 2 ベクトルの成分は基底に依存する.