1 論理・集合・写像

1.1 論理

A, B : 命題

$A \Leftrightarrow B$ 同値 ; $A \Rightarrow B$ ならば

「$A \Leftrightarrow B$」 $\Leftrightarrow$ 「$A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$」

基本

- 「A かつ B」 「A または B」
- Aの否定 「$\neg A$」

th　A または $\neg A$ は真

かつ または 否定の関係

- $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
- $\neg(A$ かつ $B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee B$

$$\Leftrightarrow B \vee (\neg A)$$

$$\Leftrightarrow (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$$ 対偶

- $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee B)$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg A)) \wedge (\neg B)$$

$$\Leftrightarrow A \wedge (\neg B)$$

全称記号∀と存在記号∃

・$P(x)$：xを変数とする命題

・$\forall x\ P(x) \Leftrightarrow$ すべての(任意の)xについて$P(x)$が成立

・$\exists x\ P(x) \Leftrightarrow$ あるxについて$P(x)$が成立

$\Leftrightarrow$ $P(x)$が成立するようなxが存在する.

(例)「$P(x) \Rightarrow Q(x)$」は厳密に言えば

$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ を表す.

否定

・$\neg(\forall x\ P(x)) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$

・$\neg(\exists x\ P(x)) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$

・$\neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\Leftrightarrow \neg(\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x)))$

$\Leftrightarrow \exists x\ \neg(P(x) \Rightarrow Q(x))$

$\Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge (\neg Q(x)))$

(例)

$P(x)$：xは連続関数

…とかくとまぎれ…

(例) $\exists x\, P(x) \Leftrightarrow \exists y\, P(y)$

$(\exists x\, P(x)) \land (\exists x\, Q(x))$ よりも

$(\exists x\, P(x)) \land (\exists y\, Q(y))$ のほうがよい。

$\exists x\, (P(x) \land Q(x))$ とまぎらわしいので。

注

$\neg(\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \Leftrightarrow \neg(\forall x\, (\exists y\, P(x,y)))$

$\Leftrightarrow \exists x\, \neg(\exists y\, (P(x,y)))$

$\Leftrightarrow \exists x\, \forall y\, \neg P(x,y)$

(例) $\exists, \forall$ の順序の入れかえは一般的にはできない。

① $\forall x\, \exists y\, P(x,y)$

② $\exists y\, \forall x\, P(x,y)$ ①$\not\Rightarrow$②

例

① $\forall x\, \exists y\quad x+y=0$ 　{$y=-x$ (xに依存)

② $\exists y\, \forall x\quad x+y=0$ 　{yはxに依存しない

②は falsy.

1.2 集合

A, B : set

$A = \{a, b, c, \dots\}$

$A = \{x \mid P(x)\}$

$A = \{x \in B \mid P(x)\}$

- $A \subset B \iff \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $A = B \iff A \supset B \wedge A \subset B$

和集合

$A \cup B$

$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$

$\bigcup_{n=1} A_n = \{x \mid \exists_n\ x \in A_n\}$

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda = \{x \mid \exists_\lambda\ x \in B_\lambda\}$

積集合

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

差集合

$A \setminus B = A - B$

$= \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

$\Omega \supset A \quad A^c = \Omega \setminus A$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$