$\lambda\in\Lambda$ に対応する A の元を
A_λ と書き $A=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書く

集合族 $A=\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の和集合と共通部分を
次で定める

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \mid \exists\lambda\in\Lambda,\ x\in A_\lambda\}$$

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \mid \forall\lambda\in\Lambda,\ x\in A_\lambda\}$$

Th 17 ド・モルガン

集合 X と集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ について
次が成り立つ.

- $X-\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(X-A_\lambda)$
- $X-\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(X-A_\lambda)$

Col.18

$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$$

2. 写像

2.1 写像の像と逆像

集合 X の各元に Y の元をそれぞれ一つずつ
与える対応を X から Y の写像(map)といい
写像の名前が f の時 $f: X\to Y$ もしくは
$X\xrightarrow{f}Y$ と書く。
さらに $x\in X$ を f で対応させられる Y の元を
$f(x)$ と書き $x\mapsto f(x)$ と書く.
X を f の定義域, Y を f の値域という.

写像 f と g が等しいとは,
f, g の定義域, 値域が等しく,
定義域内の任意の元で $f(x)=g(x)$ が成立
するとき

集合 X に対し, X から X への写像で
$x\in X$ に対し, x を対応させるものを X の恒等写像といい,
1_X, また X が明らかな時は 1 と書く.

写像 $f: X\to Y$ を考える.

- $A\subset X$ について, Y の部分集合を
$f(A)=\{y\in Y \mid \exists a\in A$ で $y=f(a)\}$
で定め, A の f による像(image)という.

- $B\subset Y$ について, X の部分集合を

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$
で定め、Bのfによる逆像という。

Prob 2.1 写像 $f : X \to Y$ について

1) $A_1, A_2 \subset X$ について

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

2) $B_1, B_2 \subset Y$ について

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

∵) 1) $x \in f(A_1 \cup A_2)$

$\Leftrightarrow \exists a \in A_1 \cup A_2,\ f(a) = x$

$\Leftrightarrow \exists a \in A_1$ or $a \in A_2,\ x = f(a)$

$\Leftrightarrow x \in f(A_1) \cup f(A_2)$

$x \in f(A_1 \cap A_2)$

$\Leftrightarrow \exists a \in A_1 \cap A_2,\ x = f(a)$

$\Rightarrow x \in f(A_1) \wedge x \in f(A_2)$

$\Leftrightarrow x \in f(A_1) \cap f(A_2)$

一般に $f(A_1 \cap A_2) \neq f(A_1) \cap f(A_2)$

$X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{0, 1\}$

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$.

$A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$

$\Rightarrow f(A_1 \cap A_2) = \{1\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{0, 1\}$.

2) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Prob 2.2 写像 $f : X \to Y$ を考える

1) Xの部分集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について

$$f\Big(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$

$$f\Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(A_\lambda)$$

2) Yの部分集合族 $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について.

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$$

Prob 23　写像 $f: X \to Y$ を考え,

1)　$A_1, A_2 \subset X$ について

$$f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2)$$

2)　$B_1, B_2 \subset Y$ について.

$$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B) - f^{-1}(B_2)$$

3)　$A \subset X$ について
$$A \subset f^{-1}(f(A))$$

4)　$B \subset Y$ について
$$B \supset f(f^{-1}(B))$$

∵)　1)　$x \in f(A_1) - f(A_2)$

$\Leftrightarrow \exists a \in A_1,\ x = f(a),\ \underline{f(a) \notin f(A_2)}$
$\quad\quad \Rightarrow a \notin A_2$

$\Rightarrow \exists a \in A_1 - A_2,\ x = f(a)$

$\Leftrightarrow x \in f(A_1 - A_2)$

2)　$x \in f^{-1}(B_1 - B_2)$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 - B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \notin B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \notin f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$

3)　$x \in A$.

$\Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

4)　$x \in f(f^{-1}(B))$

$\Leftrightarrow \exists y \in f^{-1}(B),\ x = f(y)$